

Schack och matematik

– En studie om springarproblemet

Amir Moaveni

Sammanfattning

Schack har fascinerat människan i århundraden. Dess rötter kan spåras till Indien så långt tillbaka som till ca 600 e kr. Det som fångat människan är dess rika mångfald då taktik och planering av varje drag är centralt i spelet. Få spel har så enkla regler men samtidigt så komplexa spelmönster som schack.

På grund av springarens speciella rörelse på schackbrädet anses den vara bland de mest intressanta pjäserna att studera. Springarproblemet är gammalt och behandlades redan av **Leonard Euler** (1707-83). Frågan är om springaren kan ta sig runt brädet och därvid besöka varje ruta en och endast en gång och om det finns en sådan tur är följdfrågan hur många olika sådana turer det finns. I den här uppsatsen studeras springarproblemet som är en av många frågeställningar i schacksammanhang, med hjälp av grafteori. Springarens färd på brädet illustreras med grafer.

INNEHÅLLSFÖRTECKNING

1	INLEDNING.....	4
1.1	SCHACKETS HISTORIA	4
1.2	MATEMATIKER INTRESSERAR SIG FÖR SCHACK.....	4
1.3	NÅGRA KÄNDA PROBLEM	5
1.3.1	Åtta damer.....	5
1.3.2	Icke-attackerande torn	6
1.3.3	Minimalt och maximalt antal kungar.....	7
2	INTRODUKTION TILL SPRINGARCYKEL/TUR.....	9
2.1	VAD ÄR SPRINGARCYKEL/TUR?	9
2.2	BAKGRUND.....	9
3	GRAFTEORI.....	11
3.1	GRUNDLÄGGANDE BEGREPP INOM GRAFTEORI	12
3.2	BIPARTIT GRAF	13
3.3	EULERSKA GRAFER.....	14
3.4	HAMILTONSKA GRAFER.....	15
4	MATEMATISK BESKRIVNING PÅ SPRINGARPROBLEMET.....	16
4.1	TILLÄMPNING AV WARNSDORFFS METOD.....	17
4.2	FINNS DET NÅGRA GENERELLA REGLER FÖR EN SPRINGARCYKEL?.....	21
4.3	GÅR DET ATT RÄKNA ALLA SPRINGARCYKLER FÖR ETT $N \times M$ BRÄDE?.....	22
4.4	CLIQUE OCH COCLIQUES.....	23
5	SAMMANFATTNING.....	25
6	REFERENSER.....	27

1 Inledning

1.1 Schackets historia

Med största säkerhet uppfanns schacket i Indien. Schack nämns första gången i sanskritkällor från ca 600 e.Kr. Man har dessutom funnit primitiva schackpjäser från ca 150 e.Kr. Det är möjligt att schack är äldre än så, men det finns inga källor som kan verifiera det. Schack kallades ursprungligen *chaturanga* som betyder 'fyra lemmar' som syftar på uppdelningen av de indiska vapenslagen i historisk tid. Chaturanga simulerade de olika vapenslagen kavalleri, elefanter, infanteri och stridsvagn [4].

Chaturanga spreds på 600-talet till Persien. Perserna introducerade schackmatt samt begreppet schack. Tidigare kunde man slå kungen. Engelskans *rook* för torn kommer av det gamla persiska ordet *ruk*. Det persiska ordet för kung, *shah*, har gett upphov till spelets namn på de flesta språk idag. Teorin om spelet växte snabbt. Teoretiker skrev verk om öppningsteori, systematisk taktik samt om strategiska teman i mittspel och slutspel. År 833 fällde Al-Mamun, kalifen i Bagdad, detta yttrande: -"Det är märkligt att jag som härskar över världen från Indus i öster till Andalusien i väster inte kan hantera 32 schackpjäser på detta lilla bräde".

Det islamiska imperiets expansion medförde att spelet spreds till Mellanöstern, Nordafrika och Sydeuropa. Det är framförallt via Spanien som schack tog sig till Europa. De första källorna som nämner schack i Europa är från strax efter år 1000. Araberna var dock mest framstående fram till 1200-talet då starka europeiska spelare började framträda. Efter 1200-talet började européerna förändra reglerna för att göra spelet mer spännande och intressant. Den äldsta bevarade schackboken är från 1497. Den är skriven av Luis Ramirez de Lucena som bl.a. gav rådet att man skulle se till att motståndaren är berusad innan man börja spela.

Vid slutet 1500-talet var schackreglerna slutligen i stort sett fastlagda. Internationaliserade regler jämnade vägen för de riktigt stora schackspelarna. Den förste av dessa var spanjoren Ruy Lopez som uppfann spanskt försvar och som förmodligen var sin tids bästa spelare. Han besegrade Italiens och Spaniens bästa spelare och skrev den inflytelserika boken *Libro de la Invencion Liberal y Arte del Juego del Ajxedrez*. Andra stora spelare från denna tid var Paolo Boi, Alessandro Salvio och Gioachino Greco, alla från Italien.

Centrum för det europeiska intellektuella livet flyttade norrut under sena renässansen och schacklivet följde efter. 1700-talets överlägset bästa spelare var fransmannen André Danican Philidor. Han var också en erkänd musikkompositör. Philidors försvar är uppkallat efter honom. Philidor spelade bl.a. i England och Frankrike och besegrade allt motstånd. Han förnyade den analytiska tekniken och införde nya modernistiska positionella begrepp, såsom bondekedjans betydelse.

1.2 Matematiker intresserar sig för schack

Ända sedan schackspelet uppfanns i Indien för cirka 1500 år sedan har spelet roat och fascinerat människor världen över. Egenskaper som pjäsernas rörelser på brädet, taktik och planering av varje drag, brädets enkelhet och spelets oändliga utmaningar har gjort många människor nyfikna på schackspelet. Särskilt har matematiker varit intresserade av att studera schack eftersom spelet delar matematikens logik och abstraktion vad gäller problemlösning.

Ansträngningar att skapa en matematisk teori för schackspelet har hittills inte medfört några konkreta resultat trots att kända matematiker som Euler, Gauss, Vanermonde, Legendre har studerat området [1]. En del matematiska teorier såsom grafteori, aritmetik,

kombinationsanalys och geometri har använts som hjälpmetod för att analysera spelet. Och i vissa fall har schackspelet även kunnat användas i matematiska sammanhang. Springarproblem, som behandlas i denna uppsats, är ett exempel på hur matematiska teori används inom schack och vice versa.

Trots flera hundra års analys och studium av schack och dess oändliga kombinationer är spelet än idag mycket intressant på grund av dess fantastiskt stora kombinationsmöjligheter.

De flesta matematiska studier och forskningar om schack har gjorts i syfte att söka sifferhemligheterna hos schackbrädet och schackpjäsernas rörelser. Det görs även andra matematiska studier inom detta område. Två frågor som brukar ställas i detta sammanhang är:

- *Hur många pjäser av en given typ kan placeras på ett schackbräde utan att de attackerar varandra?*
- *Vad är minsta antalet pjäser som krävs för att täcka eller attackera alla rutor på ett bräde?*

1.3 Några kända problem

1.3.1 Åtta damer

Ett av de mest kända problemen, är "Åtta damer", som framlades av M. Bezzel i Berlin *Schachzeitung* i 1848. Frågan är hur åtta damer kan ställas upp på ett 8×8 rutor stort schackbräde så att ingen dam kan slå den andra? Och om det går, hur många kombinationer finns det? Frank Nauck publicerade 1850 i *Illustrierte Zeitung* 12 kombinationslösningar på problemet. Den tyske matematikern Gauss räknade ut 92 olika kombinationer för detta problem. Egentligen finns det bara 12 kombinationer, men de övriga fås genom att vända på schackbrädet och genom symmetriska uppställningar. Motsvarande problem med åtta torn har inte mindre än 40 320 olika varianter. Med löparen blir kombinationsmöjligheter ännu fler [11].

Bilden 1.1 visar ett av sätten att ställa upp åtta damer så att de inte kan slå varandra.

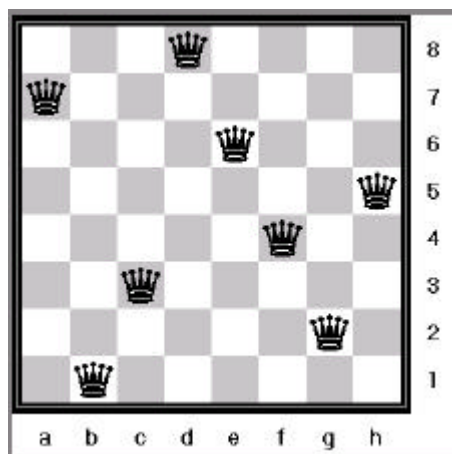


Bild 1.1

Det går givetvis att utveckla problemet "åtta damer" till det mer generella problemet " n damer" på ett $n \times n$ bräde. För $n < 4$ är det ganska enkelt att kontrollera att det inte finns lösning på problemet med undantaget för det triviala fallet med en dam på ett 1×1 bräde.

Antalet "fundamentala" kombinationslösningar $F(n)$ och alla lösningar inklusive rotation av schackbrädet och symmetriska uppställningar $S(n)$, för $n=1, \dots, 12$ framgår av tabell 1.1 [17].

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
F(n)	1	-	-	1	2	1	6	12	46	92	341	1784
S(n)	1	-	-	2	10	4	40	92	352	724	2680	14200

Tabell 1.1

Någon generell metod för att räkna ut alla kombinationer för "*n damer*" på ett $n \times n$ bräde har jag inte sett någonstans. Djupare undersökning av detta problem ligger utanför denna uppsats. Ett annat intressant problem med damen är finna minsta antalet damer som behövs för att täcka, eller attacker, alla rutor. Det behövs minst fem damer för att täcka eller attackera alla rutor på ett 8×8 bräde. Det finns inte mindre än 638 olika "fundamentala" kombinationslösningar på detta problem. Bilden 1.2 visar en av dessa lösningar.

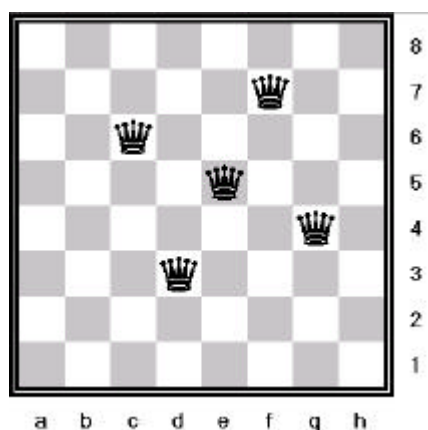


Bild 1.2

Det är intressant att notera att fem damer även kan täcka bräden med 9×9 , 10×10 och 11×11 rutor [17].

1.3.2 Icke-attackerande torn

Ett annat intressant exempel är att bestämma antalet icke-attackerande torn på bräden med 8×8 rutor. Svaret är 8 torn, diagonalt placerade på 8×8 brädet. Maximalt antal icke-attackerande torn som kan placeras på ett bräde med $n \times n$ rutor är n och totalt antal placeringssätt av n icke-attackerande torn på $n \times n$ brädet är $n!$ [18]. Bilden 1.3 visar 8 icke-attackerande torn på 8×8 brädet.

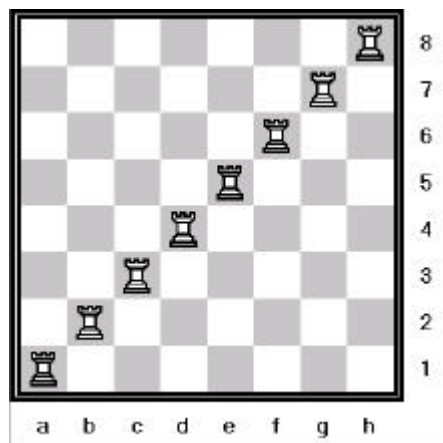


Bild 1.3

1.3.3 Minimalt och maximalt antal kungar

Den icke-attackerande pjäsen kan givetvis vara kung, springare eller löpare. Som ett sista exempel i detta avsnitt har jag valt icke-attackerande kungar men återkommer till detta problem i avsnitt 4.4 för pjäsen springare. Det kanske inte är så svårt att svara på den frågan efter lite laborering med pjäserna på brädet, även om det kräver tålamod och systematiskt tankearbete. Bilden 1.4 visar 16 icke-attackerande kungar på schackbrädet [18].

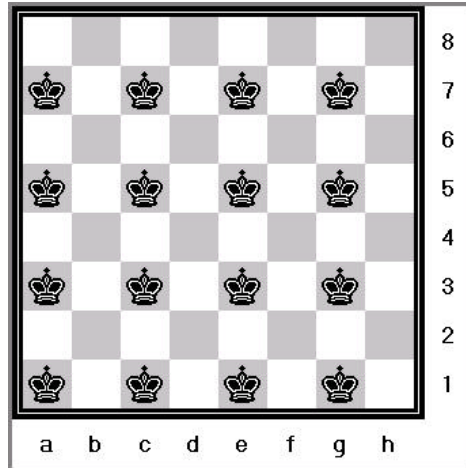


Bild.1.4

Finns det då någon generell metod för att räkna ut det maximala antalet icke-attackerande kungar $k(n)$ på ett $n \times n$ rutor stort bräde? Generellt gäller:

$$\begin{array}{ll}
 k(n)=n^2/4 & n \text{ jämn} \\
 k(n)=(n+1)^2/4 & n \text{ udda}
 \end{array}$$

Minsta antalet kungar (bild 1.5) för att täcka eller attackera alla rutorna på ett bräde med 8×8 rutor är 9 [18].

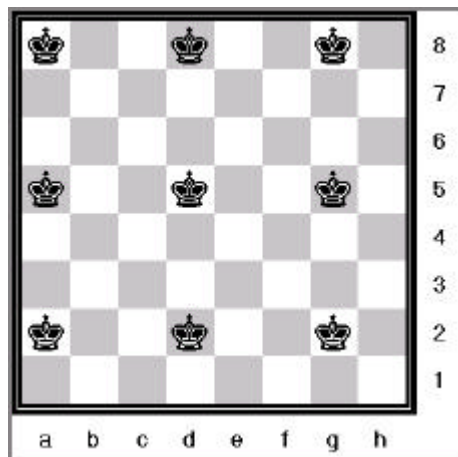


Bild 1.5

Det är inte bara kul att syssla med den här sortens problemlösningar, utan ibland kan det komma till praktisk nytta också. I den ryska (sovjetiska) filmen "Havets skräck" skildras utnyttjandet av schackkunskaper. Filmen handlar om sovjetmarinens arbete med att rensa upp tyska minfält som en viktig sjöfartsled efter andra världskriget. Efter omfattande sökning lyckades man oskadliggöra 32 av 36 minor. All uppmärksamhet var givetvis riktad på att hitta de fyra återstående minorna som utgjorde en stor fara för sjöfarten. Kapten Ratonov, en av dem som intensivt försökte lösa problemet, fick veta att den som placerat ut minorna var en tysk ingenjör med mycket stort intresse för schack. Ratonov, själv schackentusiast, kom på

några springarproblem och fick idén att minorna kunde vara utplacerade som på schackbrädet enligt ett schema. Detta antagande visade sig vara riktigt och ledde till att alla återstående minorna hittades och oskadliggjordes [11].

I denna 10-poängsuppsats demonstreras samspelet mellan schack och matematik. För att göra det har jag valt att utgå från ett konkret problem, nämligen *Springarproblemet*. I avsnitt 2 ges en introduktion till springarproblemet. Därefter introduceras grafteori i avsnitt 3 för att vidare i avsnitt 4 studera matematiska tillämpningar på springarproblemet.

2 Introduktion till Springarcykel/tur

Pjäsen springare är på grund av sin speciella L- rörelse på schackbrädet intressant att studera. Bilden 2.1 visar springarens förflyttning på brädet.

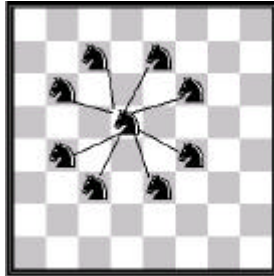


Bild 2.1

2.1 Vad är springarcykel/tur?

Springarproblemet går ut på att hitta en tur på $n \times m$ bräde där springaren besöker varje ruta endast en gång. Det finns två varianter av springarproblemet. Den första varianten är att finna en tur där springaren besöker alla rutorna endast en gång. Denna tur kallas springartur. Den andra varianten av springarproblemet är att finna en cykel som täcker alla rutorna på brädet och även här besöks alla rutorna endast en gång. Med cykel menas att pjäsen kommer tillbaka till utgångspunkten, eller att startrutan är nåbar från sista rutan i färden. Den här varianten kallas för springarcykel och är intressant för den är exempel på en Hamiltoncykel i en graf (se avsnitt 3.4). Problemet att finna sådana tillhör NP-kompleta problem dvs det går inte att hitta en algoritm som garanterat kan finna en lösning inom en tid som kan uttryckas med hjälp av polynom (NP = non deterministic Polynomial Time) [22].

2.2 Bakgrund

År 1759 lämnades den första uppsatsen om springarproblemet till vetenskapliga akademien i Berlin av matematikern Euler. Han hade analyserat problemet och kunde i sina studier bland annat konstatera att det inte finns någon cykel på ett bräde med udda antal rutorna samt att på ett 5×5 bräde börjar eller slutar alla turer i hörnrutan. Euler koncentrerade sig på schackbrädet med på 8×8 rutorna för att konstruera turer. Bild 2.2 visar en springartur konstruerad av Euler.

1	48	31	50	33	16	63	18
30	51	46	3	62	19	14	35
47	2	49	32	15	34	17	64
52	29	4	45	20	61	36	13
5	44	25	56	9	40	21	60
28	53	8	41	24	57	12	37
43	6	55	26	39	10	59	22
54	27	42	7	58	23	38	11

Bild 2.2

Många matematiker har analyserat springarproblematiken ur olika perspektiv för att finna en generell metod som är applicerbar för alla $n \times m$ bräden. Hittills har dessa studier inte lett till någon generell lösning på problemet. Det är lätt att tänka sig sökprocedurer för att gå igenom alla färdvägar och hitta alla turer eller cykler som kan finnas men eftersom beräkningstiden antas växa exponentiellt med brädets storlek blir det i praktiken omöjligt att undersöka stora bräden.

Ett sätt att ta reda på om det finns sådana turer eller cykler är att helt enkelt pröva alla möjliga vägar som springaren kan välja mellan. De flesta slutar i en återvändsgränd, dvs springaren kommer till en ruta varifrån den inte kan ta sig vidare utan att hamna på en ruta som redan besökts. Denna metod kallas ”*Backtracking*”. Metoden går ut på att man backar ett steg och provar en annan väg och har man redan provat alla val då får man backa ett steg till osv.

Problemet att hitta springarturer/cyklar är hanterbart på ett mindre bräde. På ett 6×6 rutors bräde är *backtracking* en användbar metod för att räkna antalet turer och cykler. På ett sådant bräde finns 9 862 olika springarcyklar, ett resultat som fås efter att ha provat 4 056 367 434 drag [4].

På ett 8×8 rutors schackbräde visar sig problemet vara en tidskrävande process som är riktig utmanande även för dagens datorer. Bild 2.3 visar olika färdvägar för springaren på 8×8 brädet.

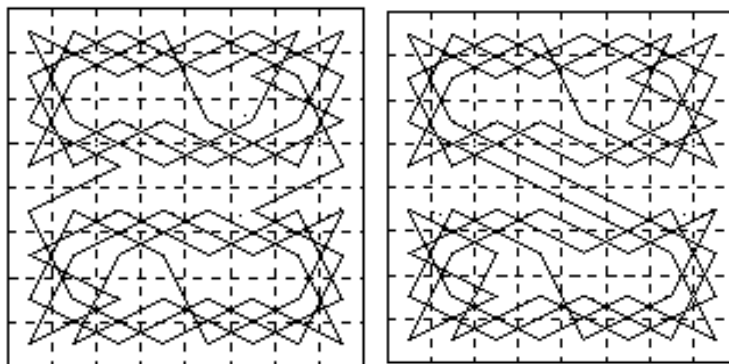


Bild 2.3 Springarcykel

En annan praktisk metod för att konstruera springarturer/cyklar upptäcktes redan på början av 1800-talet av H.C Warnsdorff [26]. Warnsdorffs metod går ut på att undvika att skapa återvändsgränder – dvs rutor från vilka springaren inte kan ta sig vidare utan att hamna på en redan besökt ruta. Inför varje drag undersöks därför vilka nya rutor som springaren har att välja mellan. Sedan noteras hur många nya valmöjligheter och fria utgångar nya rutorna har och därefter väljer springaren att gå till den ruta som har minst fria utgångar kvar.

Warnsdorffs metod ger lösningar, men inte samtliga. Det går att göra vägval i strid med metoden och ändå uppnå en komplett färdväg för springaren. Det finns ett drag av godtycklighet i detta då vägvalen ofta är likvärdiga enligt metoden och på riktigt stora bräden uppstår problem. Warnsdorff själv hade knappast möjlighet att undersöka detta. Dagens datorexperiment visar att metoden inte fungerar för schackbräde större än 76×76 rutor men den fungerar ganska bra för mindre bräden. Bild 2.4 visar springarfärder på 5×5 och 6×6 rutor stora bräden. I avsnitt 4 visas en tillämpning av metoden.

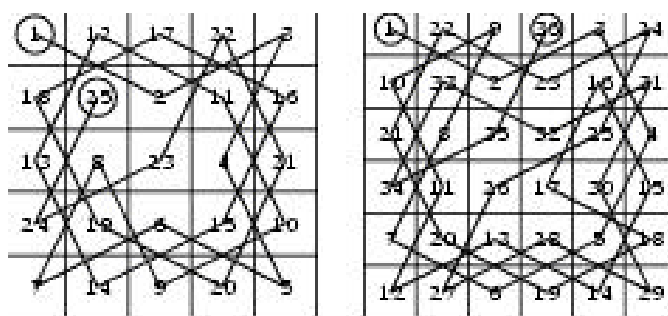


Bild 2.4

Springarfärder illustreras bäst med grafer (se avsnitt 3). Rutorna på brädet är hörn i grafen och springarens förflyttning från till exempel ruta a1 till b3 utgör en kant i grafen. Därför är det naturligt att se problemet med att finna springarfärder som ett grafteoretiskt problem.

Arnd Roth applicerade en algoritm som Axel Conrad upptäckte 1994 [15] för att hitta Hamiltonturer (definieras i 3.4) i grafer svarande mot springarens rörelse på schackbrädet. Enligt denna algoritm finns Hamiltontur för $n = 5$. Roth styckade brädet i mindre schackbräden och hittade turer på bräden $n = 5$ till 8. Med n avses antal rutor på brädet och antalet hörn i grafen. Bilderna 2.4 och 2.5 visar turer ritade av Roth.

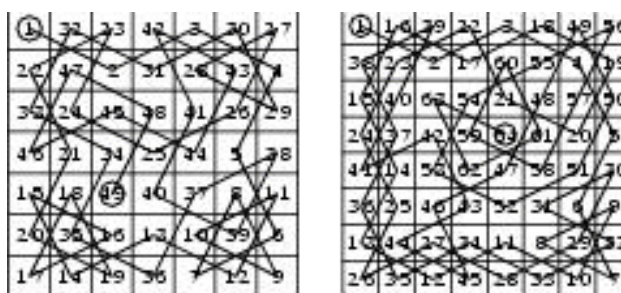


Bild 2.5 Springarturer på 7 x 7 och 8 x 8 bräden

3 Grafteori

I staden Königsberg (numera Kaliningrad) i östra Preussen sägs det att man på söndagar roade sig med att försöka promenera runt i staden så att man korsade stadens sju broar men att man endast korsade varje bro en gång. Eftersom varje försök hade misslyckats trodde många att detta var omöjligt. År 1736 fick en av dåtidens största matematiker, *Leonhard Euler* höra om problemet och i en artikel som publicerades samma år bevisade han att det verkligen inte kunde lösas. För att försöka lösa gåtan delade Euler staden i fyra delar och sju broar vilket illustreras i bilden nedan [16].

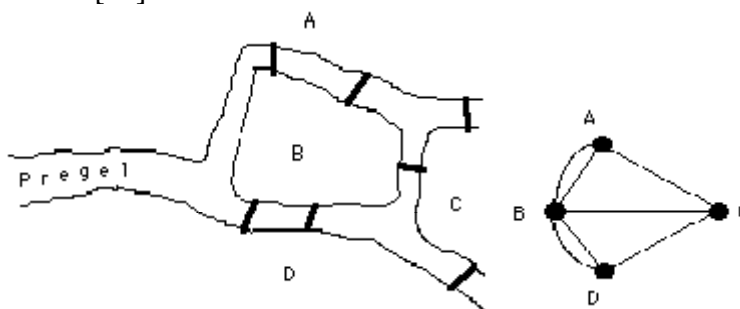


Bild 3.1

I sin artikel formulerade han följande tre regler med vilka man alltid ska kunna finna en lösning [3].

- Om det finns fler än två landmassor (hörn) med ett udda antal broar (kanter) är sådan promenad (Eulersk tur) omöjlig att genomföra.
- Om det finns exakt två landmassor (hörn) med ett udda antal broar (kanter) så kan man utföra promenaden (Eulersk tur) om man startar på en av landmassorna och slutar i den andra.
- Slutligen, om det inte finns någon landmassa (hörn) med udda antal broar (kanter) kan man utföra promenaden (sluten Eulersk tur) och starta från valfritt ställe.

Närmare studie av den förenklade bilden (graf) av problemet som visas, till höger i bilden 3.1 visar att ett udda antal broar leder till landmassorna och därför är det enligt den första regeln, omöjligt att promenera runt staden på sådant sätt att man korsar varje bro precis en gång.

Grafteori handlar om egenskaperna hos illustrerade figurer som är uppbyggda av två typer av element: *hörn* och *kanter*. I kommande avsnitt ges en kort genomgång av de mest grundläggande definitionerna och begreppen i grafteori. Vidare studeras bipartita grafer och Eulerska och Hamiltonska grafer presenteras mera ingående.

3.1 Grundläggande begrepp inom grafteori

En graf kan avbildas som en figur med punkter och linjer i vilken punkterna representerar grafens hörn och linjerna representerar kanterna.

En graf består av två disjunkta mängder (V,E) . Elementen i V kallas för hörn. E är en delmängd av två mängder ur V . Elementen i E kallas för kanter. Med disjunkta menas att det inte skall förekomma några gemensamma element, element som i sådana fall skulle både vara hörn och kanter samtidigt.

En kant förbinder exakt två hörn och därför beskrivs den lättast av sina ändpunkter. Ordningen på hörnen som beskriver en kant har ingen betydelse eftersom kanten som går från hörn u till hörn v är samma kant som går från v till u och beskrivs därför lättast med en mängd som har precis två element (tagna från hörnmängden). Observera att riktade grafer ej tas upp i denna uppsats.

En kant sägs tillhöra var och en av sina ändpunkter, och två kanter som tillhör samma ändpunkter sägs vara *näralliggande* [7].

Definition 1: *En graf G består av två ändliga mängder: en mängd $V(G)$ av hörn och en mängd $E(G)$ av kanter (bågar), där varje kant är associerad med en mängd bestående av antingen en eller två hörn (Observera att det är alltid ett par av hörn såsom (a,a) loop eller (a,b) vanlig kant) vilka kallas kantens ändpunkter. Grafen betecknas som $G=(V,E)$.*

En *enkel graf* innehåller inga multipla kanter eller loopar. En *multigraf* är en graf med flera kanter mellan samma hörn.

Definition 2: *Låt G vara en graf där v och w är hörn i G . En tur (promenad) från v till w är en ändlig alternerande följd av på varandra följande hörn och kanter i G . Sålunda har en tur formen $v_0 e_1 v_1 e_2 \dots v_{n-1} e_n v_n$, där v -na representerar hörn, e -na representerar kanter, $v_0 = v$, $v_n = w$, och för alla $i = 1, 2, \dots, n$, v_{i-1} och v_i är ändpunkterna till e_i . Den triviala turen från v till v består av det enda hörn v .*

Definition 3: Låt G vara en graf och v ett hörn i G . Graden (valensen) av v , betecknad $\text{deg}(v)$, är lika med antalet kanter som tillhör v , med en kant som är en loop räknad två gånger. Den totala graden av G är summan av graderna hos alla hörn i G .

Sats 1: Om $G=(V,E)$ är en graf (icke riktad), då gäller att $\sum_{v \in V} \text{deg}(v) = 2|E|$.
Därför följer omedelbart att:

Följsats 2: Den totala graden hos en icke riktad graf är jämn.

Definition 4: En delmängd S av hörn i en graf där alla par av hörn i S är närliggande (adjacent), kallas för Clique.

Definition 5: En delmängd S av hörn i en graf där inga två hörn i S är närliggande (adjacent), kallas för Coclique.

Exempel:

Betrakta grafen på bild 3.2. Den har hörnmängden $V=\{a, b, c, d, e\}$ och kantmängden $E=\{\{a,b\}, \{a,d\}, \{b,e\}, \{b,d\}, \{c,e\}, \{c,d\}\}$.

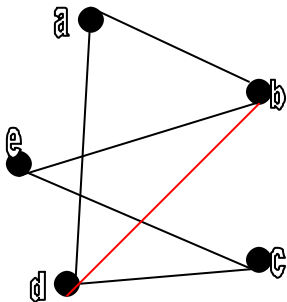


Bild 3.2

En cykel i grafen är till exempel $a, \{a,b\}, b, \{b,e\}, e, \{e,c\}, c, \{c,d\}, d, \{d,a\}, a$ eller kortare $abcda$. Hörnen a, c och e har grad två, hörnen b och d har däremot grad tre. Hörnen a, b och d formar en Clique.

3.2 Bipartit graf

För en *bipartit graf* kan man dela in alla hörn i två olika grupper på ett sådant sätt att det inte finns några kanter mellan de hörn som är i samma grupp, utan det finns bara kanter som förbinder de båda grupperna. Se bild 3.3.

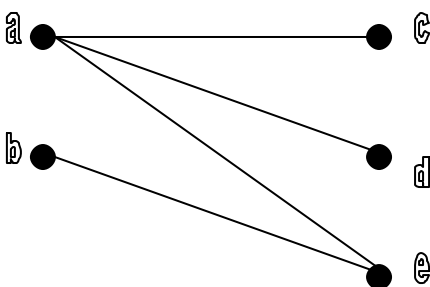


Bild 3.3

Definition 5: Grafen $G=(V,E)$ är bipartit om $V=V_1 \cup V_2$ med $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ och varje kant av G är från formen $\{a,b\}$ med $a \in V_1$ och $b \in V_2$. Med andra ord, en graf bestående av två disjunkta

delmängder V_1 och V_2 där varje hörn $v_1 \in V_1$ bara har grannar i V_2 och där varje hörn $v_2 \in V_2$ bara har grannar i V_1 , kallas för en bipartit graf.

En fullständig (komplett) bipartit graf på (m,n) hörn, betecknad $K_{m,n}$, är en bipartit graf med hörn v_1, v_2, \dots, v_m och w_1, w_2, \dots, w_n som uppfyller följande villkor: För alla $i, k=1, 2, \dots, m$ och för alla $j, l=1, 2, \dots, n$, gäller att det finns en kant från varje hörn v_i till w_j . I bild 3.4 nedan illustreras $K_{2,3}$ [8].

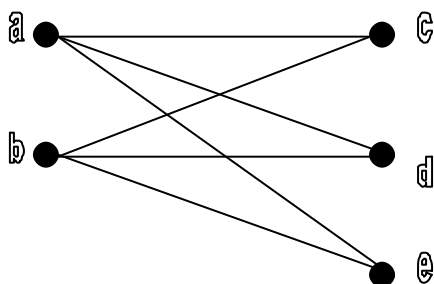


Bild 3.4

3.3 Eulerska grafer

Vad som är intressant i en Eulersk graf är att hitta en väg där det går att "promenera" längs alla kanter endast en gång. Om promenaden slutar i samma hörn som den påbörjades i, då har grafen en Eulersk cykel och kallas därmed för Eulersk graf. En Eulersk graf innehåller alltså en Eulersk cykel. Om promenaden däremot inte slutar i samma hörn som den började ifrån, utan slutar i ett hörn skild från den första så är det en Eulersk tur (trail).

Sats 2: En graf har en Eulersk cykel om och endast om:

*Grafen är sammanhängande.
Alla hörn har jämna grader.*

Följdsats 2: En sammanhängande graf är Eulersk om och endast om dess kanter kan delas upp i disjunkta cykler.

Följdsats 3: En sammanhängande graf har en Eulertur om och endast om det inte finns fler än två hörn med udda grader.

Sats 1 kan appliceras för att visa att en graf har en Eulercykel, eftersom att, om det finns en Eulercykel i en graf, så måste varje hörn av grafen ha jämna grader. Med andra ord om det finns hörn av udda grader i grafen så kan det inte finnas en Eulercykel. Räcker det om varje hörn i grafen är av jämn grad? Betrakta följande icke-sammanhängande graf.

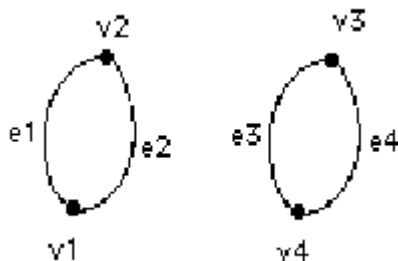


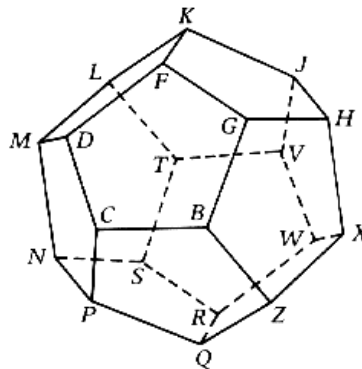
Bild 3.5

Alla hörn i grafen i Bild 3.5 är av jämna grader, men det finns ingen Eulercykel.

3.4 Hamiltonska grafer

Sir William Rowan Hamilton utsågs till "Astronomer Royal of Ireland" vid tjugotvå års ålder, adlades vid trettio, och var en ledande matematiker på sin tid. Förutom sina stora upptäckter inom algebra så är han även känd som uppfinnaren av "The Travellers Dodecahedron" (Den resandes dodekaeder) även känt som "A Voyage Arond the World" (En resa runt världen).

Dodekaeder-spelet kommer från ett grekiskt ord som betyder tolvstidning. Hörnen på tolvstidningen (tjugo stycken) var märkta med namn på viktiga städer som Bryssel, Canton, Dehli och så vidare, och slutade med Zanzibar. Varje hörn hade också en kort pinne runt vilken man kunde linda ett snöre. Målet för spelet var att ta ett snöre och linda det runt tolvhörningen (man fick endast följa kanterna) så att man passerade varje stad precis en gång (och därmed startade och slutade i samma stad.) En sådan resa kallades en "Resa jorden runt".



Bilden 3.6

Exempel 1 (med beteckningar från bild 3.6):

CDMNPQZXHJVWRSTLKFBG och slutligen C, visar en Hamiltoncykel.

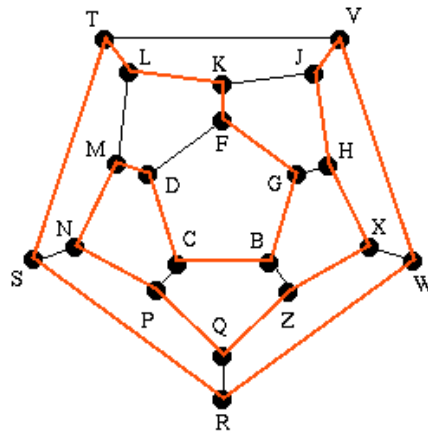


Bild 3.7: Ikosaederspelet

Definition 6: Låt $G=(V,E)$ vara en graf med $|V|=3$, då har G en Hamiltoncykel om det finns en cykel i G som består av varje hörn i V .

En intressant egenskap för en graf är om den har en Hamiltoncykel eller inte. Det är lätt att tro att det är enkelt att avgöra med tanke på att enda skillnaden mellan en Eulercykel och en Hamiltoncykel tycks vara att man i princip byter ut villkoret att gå över varje kant precis en gång mot att gå genom varje hörn precis en gång. Tyvärr verkar det vara betydligt svårare att hitta enkla kriterier som avgör om en graf har en Hamiltoncykel. Det finns kriterier som garanterar att de finns en Hamiltoncykel i en graf, men tyvärr finns det grafer som inte

uppfyller dessa kriterier men ändå har en Hamiltoncykel, alltså tillräckliga men ej nödvändiga kriterier. Det finns dock satser som kan visa om vissa typer av grafer har Hamiltonska cykler och här introduceras två av de viktigaste.

Sats 4(Ore sats): Betrakta grafen $G=(V,E)$ där $|V| = 3$. Om $deg(x) + deg(y) = |V|$ för alla icke-närsliggande(grannar) $x,y \in V$ då har G en Hamiltonsk cykel.

Bevis: För beviset se ref.[19]

Följsats 5: Betrakta en graf $G=(V,E)$ där $|V|= 3$. Om $deg(v)= V/2$ för varje hörn v , har G en Hamiltonsk cykel.

Exempel:

Betrakta bild 3.8. Om G är grafen i bilden, så bildar kanterna $\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, f\}, \{f, e\}, \{e, d\}, \{d, g\}, \{g, h\}, \{h, i\}$ en Hamiltontur. Men har G en Hamiltoncykel?

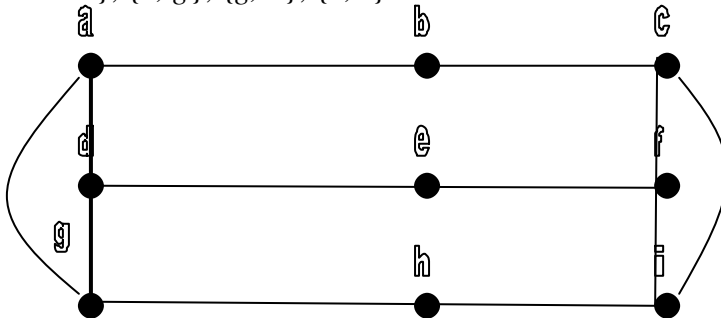


Bild 3.8

Eftersom G har nio hörn måste en Hamiltoncykel i G innehålla nio kanter. Börja i hörn b för att försöka bilda en Hamiltoncykel. Från b kan både c och a nås. På grund av symmetrin i grafen spelar det ingen roll vilken hörn som väljs. Välj hörn c . Återigen går det att välja antingen hörn f eller i . Valet denna gång faller på hörn f vilket betyder att kant $\{c, i\}$ tas bort från möjliga promenadvägar eftersom c redan har passerats en gång. Resonemanget blir det likartade om hörn i väljs. För att inkludera hörn i i cykelturen blir färden från f mot i . Med kanterna $\{c, f\}, \{f, i\}$ i cykelturen går det inte att ha kanten $\{e, f\}$ i cykeln. Om färden tar sin väg mot e blir den fast och kan inte gå vidare och därmed finns det ingen Hamiltoncykel i den här grafen.

Om en graf G har en Hamiltoncykel, så har G en subgraf (delgraf) H med följande egenskaper [10]:

1. Varje hörn hos H har graden 2.
2. H har samma antal kanter som hörn.
3. H är sammanhängande.
4. H innefattar alla hörn hos G .

4 Matematisk beskrivning på springarproblemet

Springarensfärd på ett schackbräde ($n \times m$ då $m=n$) kan illustreras med en graf eller "springargraf". En sådan kan definieras som grafen $G=(V,E)$ där

$$V = \{ (i, j) \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n \}$$

och

$$E = \{ ((i, j), (k, l)) \mid (|i - k|, |j - l|) = (1, 2) \text{ eller } (2, 1) \}$$

I denna graf finns ett hörn för varje ruta av brädet och en kant mellan två hörn då springaren kan förflytta sig från den ena rutan till den andra. Springargrafen för fallet $n=m$ har n^2 hörn och $4n^2 - 12n + 8$ kanter [6].

Ett springarcykelproblem kan definieras som en delmängd av Hamiltoncykelproblematiken och ett springarturproblem kan definieras till Hamiltonturproblemet. Eftersom Hamiltoncykelproblemet är ett NP-komplett problem är springarcykelproblemet också ett NP-komplett problem.

Problem 1: Visa att problemet att hitta en springarcykel på ett $n \times m$ bräde är ekvivalent med att hitta en Hamiltoncykel i motsvarande graf.

Lösning: I en Hamiltoncykel, behöver man besöka varje hörn i grafen G precis en gång och att man besöker varje kant en gång och endast en gång och återkommer till startpunkten är alltså en cykel. Det är viktigt att notera att alla kanter inte behöver utnyttjas i en Hamiltoncykel. Det är precis denna cykel som görs då springaren förflyttar sig (L- drag) på brädet och besöker varje ruta och återvänder till startpunkten [13].

Kombinatoriska metoder appliceras generellt för att hitta Hamiltoncykler i en graf [2,10] dock är detta inte tillämpbar på större grafer. Då det gäller springarproblemet har det utvecklats olika algoritmer för att försöka lösa problemet. Backtracking-algoritmen hittar lösningar men den är långsam och tidskrävande. En algoritm som passar (se 2.2) väl när det gäller att hitta springarturer och därmed Hamiltonturer är Warnsdorffs metod.

4.1 Tillämpning av Warnsdorffs metod

Metoden tillämpas på en springargraf genom att verifiera graden av varje nästa möjliga hörn (springarensdrag) och välja ut det hörn (ruta) som har lägsta graden. Hörn med lägsta grad ligger i riskzon för isolering och därmed är det viktigt att använda dessa hörn innan isolation inträffar. Det som gör metoden tidskrävande är att om alla eller många hörn har samma grad går algoritmen vidare ner till "barnhörn" för att kunna hitta lägsta grad mellan alla dessa "barnhörn" osv. Ett barnhörn av ett hörn, är ett hörn som inte har besökts och kan nås med en enkel förflytning från givet hörn. Som det nämndes i avsnitt 2.2 duger metoden för mindre bräden men att den blir svårare att applicera för större bräden. Bild 4.1 visar ett praktiskt exempel på denna metod för ett 3×3 bräde. I bilderna 4.1 och 4.2 har standardbeteckningar för rutor på schackbräden använts.

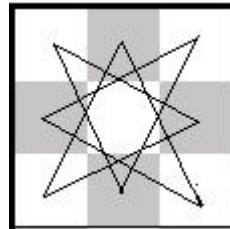
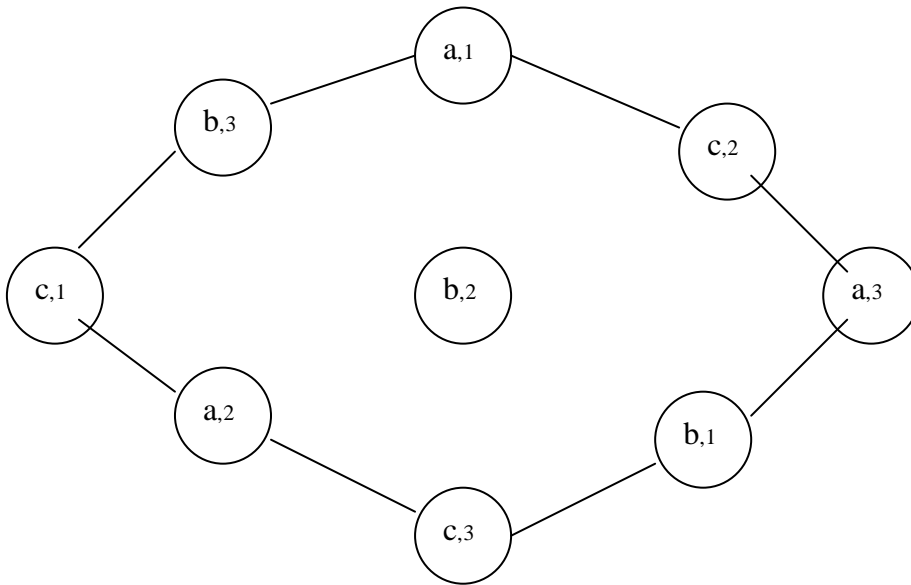


Bild 4.1

Varje hörn i grafen G i bilden motsvarar en ruta på 3×3 brädet. Det finns ett isolerat hörn (b,2) och således finns ingen Hamiltoncykel.

När det gäller ett bräde med 4×4 rutor som 16 hörn och 24 kanter blir problemet lite mer komplicerat.

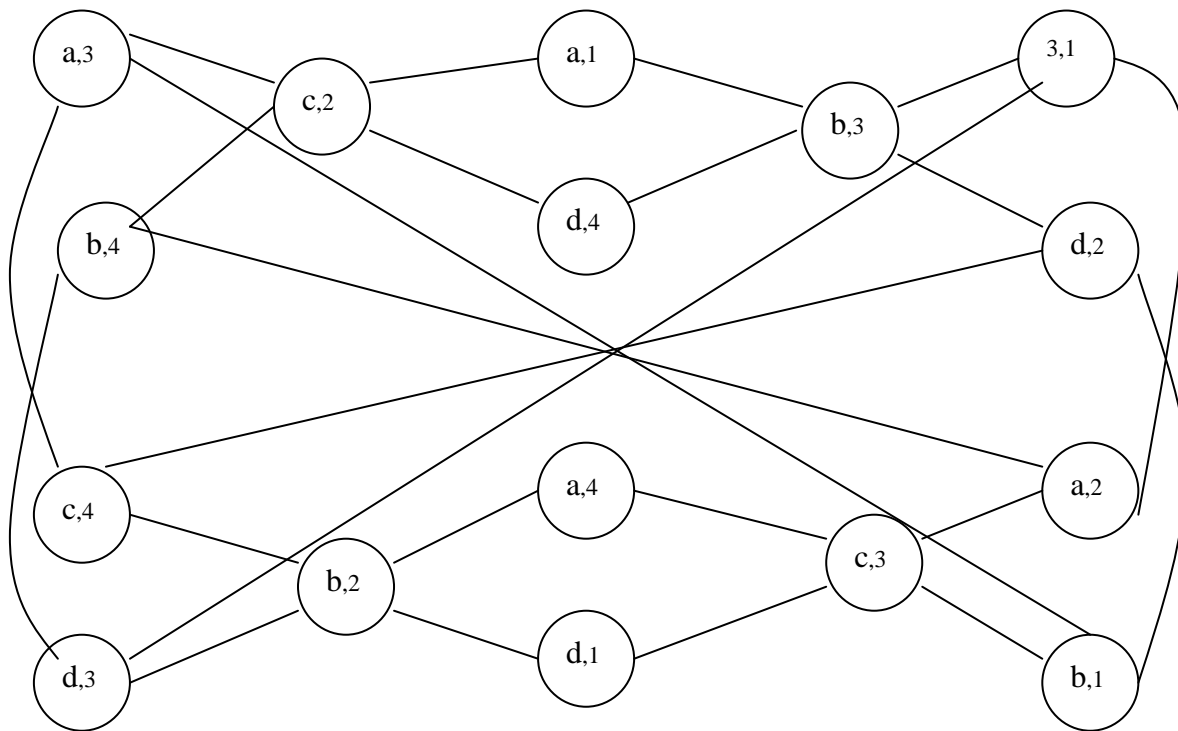


Bild 4.2

Även här finns det ingen Hamiltoncykel. Det är bara hörn (a,1), (a,4), (d,1) och (d,4) som har graden 2. Motsatta hörn har samma grannar. Det är (b,3) och (c,2) för (a,1) och (d,4), och det är (b,2) och (c,3) för (a,4) och (d,1). Om (a,1) varken är start eller ändpunkt av Hamiltonturen då måste det vara omgärdat av (b,3) och (c,2). Det samma gäller för (d,4) eftersom (a,1), (b,3), (c,2) och (d,4) måste vara första eller sista hörn i turen.

Detsamma gäller för (a,4), (b,2), (c,3) och (d,1). Eftersom de andra åtta hörnen måste vara förenade genom Hamiltonturen. Det är omöjligt eftersom grafen inte är sammanhängande.

Nummerordningen på bild 4.3 visar färdvägen på grafen i bild 4.2.

	1	2	3	4
a	1	14	7	10
b	8	11	4	13
c	15	2	9	6
d		5	12	3

Bild 4.3

Det första brädet som har en tur är 5×5 brädet. Det finns vissa tillfällen då Warnsdorffs regel inte lyckats att hitta Hamiltonturer trots att dessa existerar. Ett typexempel på detta fall illustreras i nedanstående exempel, bild 4.4.

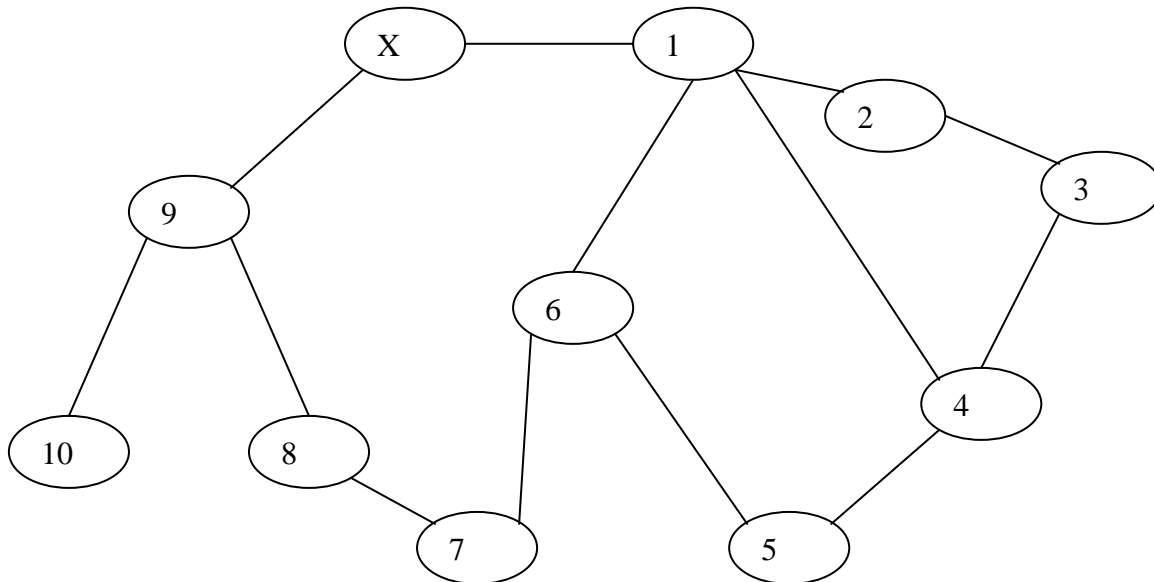


Bild 4.4

X är startpunkten i denna graf. Enligt Warnsdorffs regel, borde hörn 9 väljas vilket gör Hamiltontur omöjlig i grafen.

Ingo Wegener och hans kompanjoner i "Solution of the Knight's Hamiltonian Path Problem on Chessboards"[22] försökte förbättra Warnsdorffs metod genom att dela upp större bräden till mindre bräden för vilka finns kända turer. Det fanns möjligheter att förbättra Warnsdorffs regler så att den misslyckades mer sällan. Förbättringen var förslagen av Arnd Roth [15] i hans "Mathematica notebook". Hans förslag gjorde att algoritmen klarade upp till 428×428 bräden.

4.2 Finns det några generella regler för en springarcykel?

I sin studie bestämmer Schwenk [20] för vilka värden på n och m cykler inte kan existera. Cull och De Curtins [21] visade i sin tur existensen av cykler för de flesta värden på n och m . Resultatet av dessa studie kan sammanfattas så här:

På ett $n \times m$ bräde $1 < n = m$, finns en springarcykel om följande villkor är uppfyllda:

- nm är jämn
- varken n eller $m = 1, 2, 4$
- $n = 3$ och $m = 10$

En springartur existerar för $n \times m$ bräde där $m = n = 5$.

Schwenk, Cull och De Curtins använde sig av induktionsbevis när det gäller existens av turer och cykler. De presenterade en mängd av turer eller cykler för specifika mindre bräden. Genom att sätta ihop dessa mindre bräden kunde de presentera sin lösning för större bräden. Vidare visas i "Solution of the knight's Hamilton path problem on chessboard" [22] att det finns springarturer för alla $n \times n$ då $n = 5$. För samma bräde visas även att det finns Hamiltoncykler då $n = 6$ och n är jämn. I resten av detta avsnitt går jag genom tre lemmor som styrker några av ovan nämnda regler.

Lemma 1: En springarens drag på ett schackbräde måste växla mellan svarta och vita rutor.

Bevis: Betrakta en godtycklig ruta på schackbrädet som (i, j) där $1 \leq i \leq n$ och $1 \leq j \leq m$. Vi säger att pariteten av rutan är jämn om $(i + j) \bmod 2 = 0$ och udda om $(i + j) \bmod 2 = 1$. Alla rutor med samma färg har samma paritet (alla vita rutor är jämna och alla svarta rutor är udda).

Om springaren startar sin färd från (i, j) med paritet $p = (i + j) \bmod 2$, är nästa position för pjäsen på brädet efter ett drag $(i \pm \{1, 2\}, j \pm \{2, 1\})$ och nästa paritet blir $q = (i + j \pm \{1, 3\}) \bmod 2$. $p \neq q$ vilket visar att springaren växlar paritet för varje drag och därmed även färg [27].

Lemma 2: Om antalet rutor på $n \times m$ brädet är udda så finns det inga springarcykler.

Bevis: Beviset följer från lemma 1. För att komma till startpunkten måste springaren genomkorsa ett jämnt antal svarta och vita rutor och därmed måste totala antalet rutor vara jämnt.

Lemma 3: Springargrafen G är bipartit. Innefattar 32 vita rutor och 32 svarta rutor på ett schackbräde.

Bevis: Varje drag förenar en vit ruta och en svart ruta, se Lemma 1 [27].

Sats 1: Ett $4 \times m$ bräde kan inte ha en cykel för något värde på m .

Bevis: Anta att en cykel C existerar för ett $4 \times m$ bräde. Partitionera brädets rutor på två mängder, X och Y . De översta och nedersta raderna är mängden X och de två mittraderna är mängden Y . Från en ruta i mängden X kan springaren bara nå en ruta i mängden Y (bild 4.5) [27].

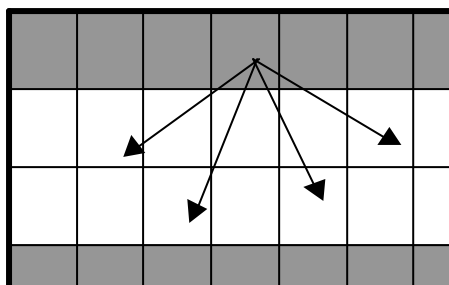


Bild 4.5: Grått i bilden visar mängden X och vitt visar mängden Y.

I cykel C sker varje förflyttning till en ruta i mängden X från en ruta tillhörande mängden Y och vice versa. Eftersom $|X| = |Y|$, måste cykeln pendla mellan mängden X och Y. Enligt lemma 1 måste springarens förflyttning växla mellan en svart och en vit ruta. Detta medför att alla rutor mängden X måste ha samma färg. Om man startar i en vit ruta på kanten kan man aldrig komma till en svart ruta på kanten. Men från partitionen från brädet är det uppenbart att båda mängder innehåller både vita och svarta rutor. Detta är en motsägelsefullt och visar därför att det inte existerar cykler C för $4 \times m$.

4.3 Går det att räkna alla springarcykler för ett $n \times m$ bräde?

Problemet med att hitta alla springarturer och springarcykler växer när brädet blir större. För de stora bräderna krävs effektiva algoritmer och kraftfulla datorer. Maximalt antal färdvägar som måste provas för att hitta springarturer är mycket större än det faktiska antalet springarturer eftersom springaren i många fall kör fast i en återvändsgränd innan den korsar hela brädet. Genom att räkna antalet tillgängliga rutor från varje ruta och multiplicera dem med varandra fås maximalt antal rutor som kan leda till turer. Men detta inkluderar även alla möjliga rutor som kan leda till en återvändsgränd för att få förståelse för hur stort problemet är kan resonemanget i exempel 1 vara till hjälp.

Exempel 1: Springaren börjar sin färd från rutan högst upp till vänster på brädet. Från denna ruta finns två tillgängliga rutor, vilket medför två möjliga turer. Välj en av dessa rutor. Och nu finns fem nya tillgängliga rutor som springaren kan välja osv. Det totala antalet turer eller rättare sagt färdvägar kan fås genom att multiplicera antalet tillgängliga rutor, alltså $2 * 5 * ..$ Eftersom springaren besöker varje ruta endast en gång är det kanske samma sak om man multiplicerar antalet efterföljande rutor (barnruta/barnhorn) på brädet. Mot detta kan argumenteras att man måste minska alla faktorer med 1 eftersom springaren alltid kommer från en av dessa rutor men eftersom turen kan börja från vilken ruta som helst på brädet kan varje ruta vara just den första.

Bilden 4.6 visar antalet färdvägar för varje ruta i ett 5×5 bräde och bilden 4.7 för ett 6×6 bräde. Av bilderna framgår att om brädet växer, växer även området i mitten och fylls på med fler rutor av grad 8 (barnruta/barnhorn) medan kanterna fylls på med fler rutor av grad 4.

2	3	4	3	2
3	4	6	4	3
4	6	8	6	4
3	4	6	4	3
2	3	4	3	2

Bild 4.6

2	3	4	4	3	2
3	4	6	6	4	3

4	6	8	8	6	4
4	6	8	8	6	4
3	4	6	6	4	3
2	3	4	4	3	2

Bild 4.7

Även om resonemanget i exempel 1 ger en grov uppskattning på möjliga färdvägar, ger det en uppfattning om hur snabbt antalet möjliga färdvägar, som måste provas för att hitta springarturer/cykler, växer när brädet blir större. Ernesto Mordecki [1] visar i sitt arbete att det totala antalet lösningar, betecknat S för springarcykel är delbart med 8 och ger en grov övregräns på denna kvantitet.

I.Wegener och Löbbing(1996) räknas antalet springarturer till 33 439 123 484 294 på 8×8 brädet [5]. År 2000 instämmer Wegener [23] med B.D McKey [24] att antalet springarturer är 13 267 364 410 532 vilket förefaller vara den korrekta siffran.

B.D McKey gjorde ingen skillnad mellan ”cykler” och ”turer” och inte heller mellan deras riktningar. Han utgick ifrån den vänstra grafen i bild 4.8. På den högra sidan i bilden har han delat upp cykel i två grafer och tagit bort kopplingen mellan dessa från mittlinjen. Mer generellt har uttrycket *nedre* och *övre halvans tur* använts för att visa en mängd av hörn-osammanhängande turer vars hörnmängd finns i den nedre och övre halvan av brädet, vars kanter är springarens rörelser, och vars ändpunkter är av grad 3 och 4.

Han definierade *turstrukturen* av en halv- tur som den mängd av ändpunktspar som turen innefattar. Med hjälp av Backtracking hittade han alla turstrukturer i halvorna, vilken uppgick till 7934470 olika turstrukturer i varje halva. Sista steget var att matcha alla dess turstrukturspar i varje halva mot varandra.

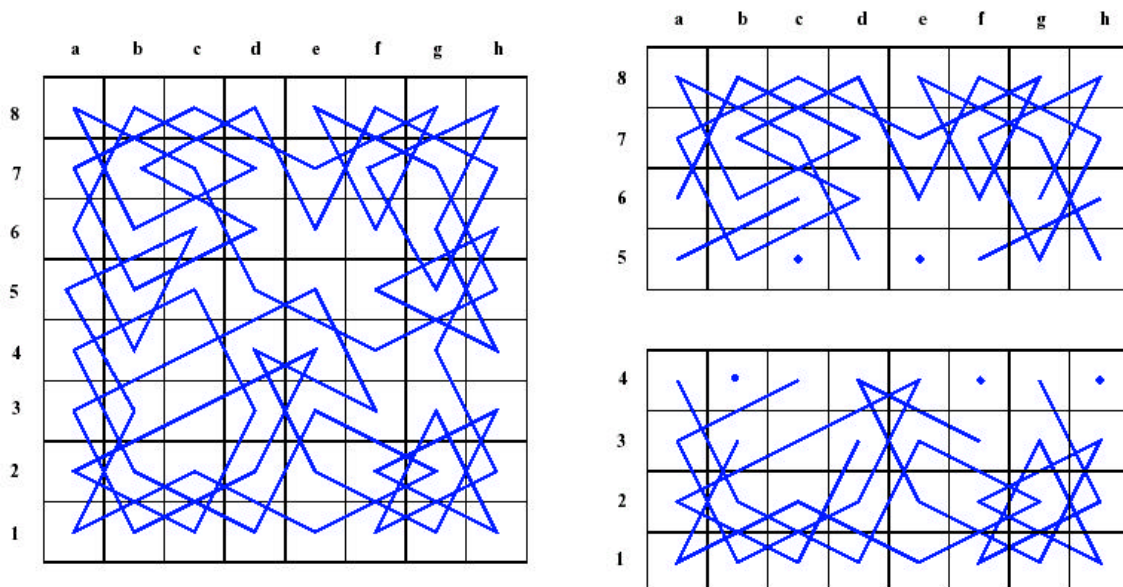


Bild 4.8

4.4 Clique och Cocliques

Frågan är vad är cocliques på springargrafen G och hur många icke-attackerande springare $k(8)$ kan det finnas på 8×8 brädet [12]?

Problem 2: Visa att grafen G på $n \times m$ bräde, där n och m är positiva heltal, är bipartit.

Lösning: Se lemma 3 i avsnitt 4.2

Låt oss återgå till frågan i början av detta avsnitt. Grafen G är bipartit och därmed är svaret 32 springare, vilket framgår av bilden 4.9 [14].

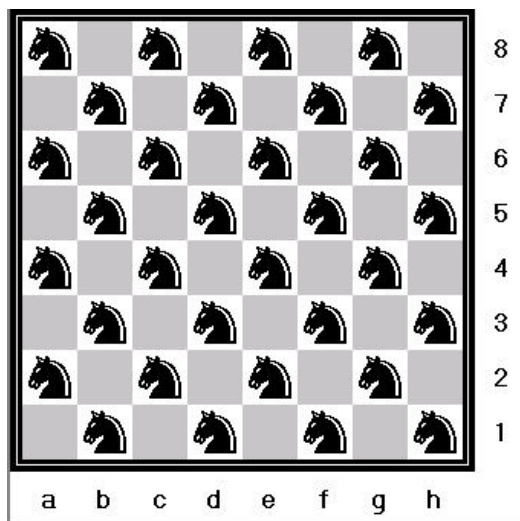


Bild 4.9

64 rutor kan partitioneras till 32 par var, enligt springarens drag. Varje par av rutor kan innehålla högst en springare. Bild 4.10 visar hur springaren täcker hela brädet (Coclique).

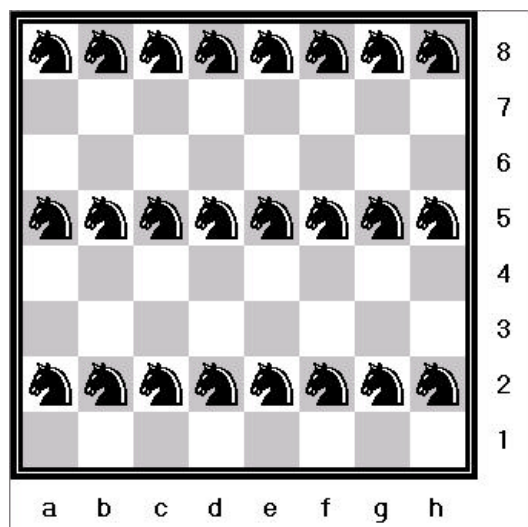


Bild 4.10

Finns det då någon generell metod för att räkna antalet icke-attackerande springare $k(n)$ på $n \times n$ bräden? Ja, det gör det (Madachy 1979 [18]). Generellt gäller:

$$\begin{aligned} K(n) &= (n^2 + 1) / 2 & n > 1 \text{ udda} \\ K(n) &= n^2 / 2 & n > 2 \text{ jämn} \end{aligned}$$

En Clique på G är bara en mängd av parvis (alla par av hörn) försvarande eller attackerande springare. Det kan inte bli mer än två springare eftersom G är bipartit.

En annan klassik fråga i detta sammanhang är vilket som är det minsta antal springare som krävs för att antingen täcka (ockupera) eller försvara varje ruta i 8×8 bräden. Bilden 4.11 visar

hur 12 springare täcker alla icke ockuperade rutor (kallad domination number) [14]. Svaret på denna fråga för godtyckligt stort bräde är inte känd men lösningar för bräden upp till 15×15 storlek är kända sedan 1918.

Frågar man sig istället om antalet springare som försvara varje ruta, oavsett om den ockuperat eller inte på 8×8 i bräden, är svaret inte längre 12 utan 14. På ett $n \times m$ bräde behövs minst $(m \cdot n)/8$ springare eftersom en springare attackerar högst 8 rutor [14].

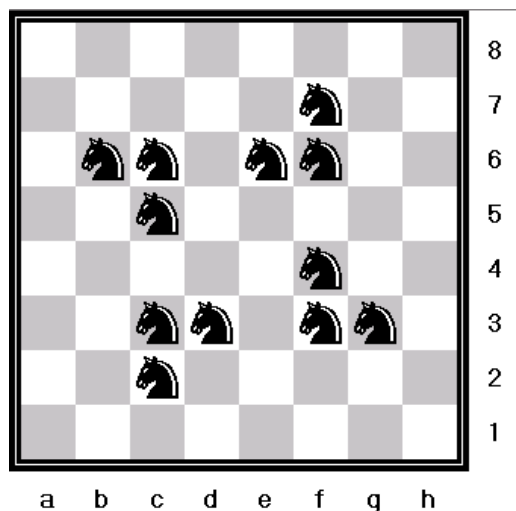


Bild 4.11

5 Sammanfattning

Ända sedan schackspelet uppfanns i Indien för cirka 1500 år sedan har spelet underhållit och fascinerat människor världen över, pjäsernas rörelser på brädet, taktik och planering av varje drag, brädets enkelhet och spelets oändliga utmaningar. De flesta matematiska studier och forskningar om schack har gjorts i syfte att söka sifferhemligheterna hos schackbrädet och schackpjäsernas rörelser. Det görs även andra matematiska studier inom detta område. Två frågor som brukar ställas i detta sammanhang är,

Hur många pjäser av en given typ kan placeras på ett schackbräde utan att de attackerar varandra?

Vad är minsta antalet pjäser som krävs för att täcka eller attackera alla rutorna på ett bräde?

Icke-attackerande torn, icke-attackerande kungar, icke-attackerande springare och åtta damer är sådana problem som tillhör denna kategorifråga. Ett annat problem som har intresserat matematiker är springarproblemet. Problemet är gammalt och behandlades redan av **Leonard Euler** (1707-83). Frågan är om springaren kan ta sig runt brädet och därvid besöka varje ruta en och endast en gång. Och om det finns en sådan tur, kommer genast följdfrågan hur många olika sådana turer det finns.

Det finns två varianter av springarproblemet. Den första varianten är att finna en tur där springaren besöker alla rutorna endast en gång. Denna tur kallas springartur. Den andra varianten av springarproblemet är att finna en cykel som täcker alla rutor på brädet och även här besöks alla rutor endast en gång. Med cykel menas att pjäsen kommer tillbaka till utgångspunkten, eller om startrutan är nåbar från sista rutan i färden. Denna varianten kallas för springarcykel och är intressant för att den är en delmängd av Hamiltoncykel problemet som tillhör kategorin NP-kompleta problem.

Kombinatoriska metoder appliceras generellt för att hitta Hamiltoncykler i en graf. Dock är detta inte tillämpligt på större grafer. Vad gäller springarproblemet har det utvecklats olika algoritmer för att lösa problemet. Backtracking-algoritmen hittar lösningar men den är

långsam och tidskrävande. Warnsdorffs regel är en annan algoritm som appliceras i detta sammanhang.

Det finns generella regler för vilka $n \times m$ bräden det finns springarcyklar och springarturer på men att hitta alla de turer/cyklar och räkna dem är inte det lättast då brädet blir större. Det krävs effektiva algoritmer och kraftfulla datorer. Till exempel har B.D McKay räknat antalet springarturer till 13 267 364 410 532. Han gjorde ingen skillnad mellan ”cykel” och ”turer” och inte heller mellan deras riktningar. Ernesto Mordecki har i sin uppsats försökt ge en överbegränsning för antalet springarcyklar.

Icke-attackerande springare (Cocliques) och försvarande eller attackerande springare (Clique) är också intressanta ur grafteorins perspektiv eftersom grafen på G på $n \times m$ bräde, där n och m är positiva heltal, är bipartit.

6 Referenser

- [1] Ernesto Mordecki. *On the number of Knight's Tours*. Facultad de Ciencias, Centro de Matematica. Ingua 4225.11400 Montevideo.Uruguay, 2001.
- [2] <http://www.combinatorics.org/>
- [3] Mark R.Keen, *Knight's Tour*.
<http://www.markkeen.com/knight.html>
- [4] G. Jelliss, *Knight's Tour Notes*.
<http://www.ktn.freeuk.com/>
- [5] M. Löbbing and I.Wegener. *The Number of Knight's Tours Equals 33,439,123,484,294- Counting with Binary Decision Diagrams*. Electronical Journal of Combinatorics, 3 no.1.,1996
- [6] I. Parberry *An Efficient Algorithm for the Knight's Tour Problem*. Discrete Applied Mathematics, vol.73,pp. 251-260, 1997.
- [7] N. Biggs, E.Lloyd, R.J.Wilson. *Graph Theory*. Oxford Clarendon 1986.
- [8] Norman L Biggs. *Discrete Mathematics*. Oxford Science Publications, 1985.
- [9] Winfried Karl Grassmann, Jean-Paul Tremblay. *Logic And Discrete Mathematics*. Prentice Hall, 1996.
- [10] Ralph P.Grimaldi. *Discrete And Combinatorial Mathematics*. Addison Wesley Longman,Inc.
- [11] Jerzy Gizycki. *Stora Schackboken*. Fröleen,1961.
- [12] Noam D Elkies, Richard P. Stanley. *Mathematical Knight*. Stanford University, Department of Mathematics, 2003.
- [13] <http://www.math.harvard.edu>
- [14] <http://www.mathworld.com/>
- [15] Arnd Roth, *The Problem of the Knight*.
<http://sunny.mpimf-heidelberg.mpg.de/people/roth/Mma/Knight.html>
- [16] L. Euler.*The Koenigsberg Bridges*. Scientific American, 189, no. 1, 1953.
- [17] Miodrag Petkovioc. *Mathematics And Chess*. Dover Publications, Inc, 1997.
- [18] Madachy, J. S. *Madachy's Mathematical Recreations*. Dover Publications, 1979.
- [19] Ore O. *Theory of Graphs*. Rhode Isaland, 1962.

- [20] A.J Schwenk. *Which rectangular chessboards have a knight's tour?* Mathematics Magazine, 64(5):325-332,1991.
- [21] P.Cull and J.DeCurtins. *Knight's tour revisited.* Fibonacci Quarterly, 16:276-285, 1978.
- [22] I.Wegener, H.Morsy, T.Hindrichs, A. Conrad. *Solution of the Knight's Hamiltonian Path Problem on Chessboards.* Discrete Applied Mathematics, 50:125-134, 1994.
- [23] I. Wegener. *Branching programs and binary decision diagrams. Theory and applications.* SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications. SIAM, Philadelphia, PA,2000.
- [24] Brendan D.MacKay. *Knight's Tours of an 8 x 8 Chessboard.* Computer Science Department, Australian National University, Canberra, ACT 0200, Australia.
- [25] Basil Vandegriend. *Finding Hamilton Cycles: Algorithm, Graphs And Performance.* Edmonton, Alberta, 1998.
- [26] H. C Warnsdorff. von *Des Rösselsprungs einfachste und allgemeinste Lösung.* Schmalkalden, 1823.
- [27] Kevin McGown, Ananda Leininger. *Knight'Tour.* MIT and Oregon State University, 2002.



Växjö
universitet

Matematiska och systemtekniska institutionen
SE-351 95 Växjö

tel 0470-70 80 00, fax 0470-840 04
www.msi.vxu.se